Lemme d'échange de Grassmann

Théorème: Soit E un espace vectoriel de type fini, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors $\# \mathcal{L} \leq \# \mathcal{G} < \infty$.
Soit $m := \# \mathcal{L}$ et $n = \# \mathcal{G}$. Alors ils existent $g_{m+1}, \dots, g_n \in \mathcal{G}$ tels que $\mathcal{L} \cup \{g_{m+1}, \dots, g_n\}$ engendre E.

Preuve: On procède par récurrence sur $m = \# \mathcal{L}$

$P(m)$: Si $\# \mathcal{L} = m$, alors $m \leq n$ et $\exists\, g_{m+1} \dots g_n$ t.q. $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{L} \cup \{g_{m+1}, \dots, g_n\})$

$P(0)$: il y a rien à montrer.

$\mathcal{L} = \{a\}$

~~Supposons P(n) vérifiée~~ $P(1)$: Comme $m \geq 1$, $E \neq \{0\}$, donc $n \geq 1 = m$
$\mathcal{G}$ est génératrice $\Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ t.q. $a = \sum \lambda_i g_i$. On peut renuméroter les g_i d'une façon que $\lambda_1 \neq 0$, alors $g_1 = \frac{a}{\lambda_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} g_i$,
et $\mathrm{Vect}(\{a, g_2, \dots, g_n\}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

Supposons $P(m)$ vraie, et montrons $P(m+1)$
Par récurrence si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{a_{m+1}\}$, $\# \mathcal{L}' = m$ et $\mathcal{L}'$ est libre, donc $m \leq n$. Si on a $m = n$, alors par hypothèse $\mathcal{L}'$ engendre E ~~est donc lib~~ et donc $\mathcal{L}'$ est une base. Mais on a vu que une base est une famille libre maximale, et $\mathcal{L} \supsetneq \mathcal{L}'$ est libre, absurde.
Donc $m \leq n-1$ et $m+1 \leq n$.

Toujours par hypothèse de récurrence, $\mathcal{L}' \cup \{g_{m+1} \dots g_n\}$ est génératrice.
Donc $\exists\, \mu_1 \dots \mu_m, \lambda_{m+1} \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, :

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j g_j .$$

Forcément l'un des λ_j est non nul : sinon $a_{m+1} - \sum \mu_i a_i = 0$ est une combinaison linéaire nulle non triviale dans $\mathcal{L}$ qui est libre.

Supposons (à renumérotation près) $\lambda_{m+1} \neq 0$. Alors

$$g_{m+1} = \frac{a_{m+1}}{\lambda_{m+1}} + \sum_{i=1}^{m} -\left(\frac{\mu_i}{\lambda_{m+1}}\right) a_i + \sum_{j=m+2}^{n} -\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{m+1}}\right) g_j .$$

Il s'en suit que $\mathrm{Vect}(\mathcal{L} \cup \{g_{m+2}, \dots, g_n\}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{L}' \cup \{g_{m+1}, \dots, g_n\}) = E$ □

Corollaire / Définition : Dans un espace de type fini E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la <u>dimension</u> de E, notée $\dim_{\mathbb{R}} E$ (ou ~~dim~~ $\dim E$).

Par convention, $\dim \{0_E\} = 0$.

Preuve. E est de type fini, donc $\exists B$ base t.q. $\# B =: n < +\infty$.
Soit B' une autre base. B' est libre, B génératrice, donc par le théorème d'échange de Grassmann $n' := \# B' \leq n$.
Comme B est libre et B' est génératrice, encore par le théorème d'échange de Grassmann, $n \leq n'$. Donc $n = n'$. □

Exemples : - $\mathbb{R}^n$ a comme base $\{e_1, \dots, e_n\}$, donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. ($\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, base : ~~...~~ $\{1, i\}$).

- Espaces de dimension infinie : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles)

(la suite $\delta_j(n) = \begin{cases} 0 & j \neq n \\ 1 & j = n \end{cases}$, $\{\delta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ est une ~~base~~ famille libre)

Conséquences importantes

Corollaire 1 : Soit E un espace de dimension finie n. Alors :

(i) Toute famille libre à n éléments est une base.

(ii) Toute famille génératrice à n éléments est une base.

(i) Grassmann, (ii) Grassmann.

Corollaire : Soit E un espace de dimension finie n. Alors :

(i) Toute famille ayant au moins $n+1$ éléments est liée

(ii) Toute famille ayant au plus $n-1$ éléments ne peut pas être génératrice.

(i) ~~maximale~~ Base $\Leftrightarrow$ libre maximale + $\#$Base $= n$. (ii) Base $\Leftrightarrow$ génératrice minimale $\#$Base $= n$.

Corollaire : Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de E. Soit $n = \dim E$, $m = \dim F$.

Alors $m \leq n$. ~~et toute base $(b_1, \dots, b_m)$~~

[Soit $(b_1 \dots b_m)$ une base de F, et $\mathcal{C}$ une base de E.

$\Rightarrow \exists\, c_{m+1}, \dots, c_n \in \mathcal{C}$ t.q. $(b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_n)$ est une base de E.]

Toute base $(b_1 \dots b_m)$ de F peut être complétée à une base $(b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$ de E.

(base incomplète, ou Grassmann ...)

Exemple fondamental : système linéaire.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \quad x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$$

b, $a_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j}) \in \mathbb{R}^m$

$\uparrow$ j-ième colonne de (a_{ij}) matrice.

$(**)$ $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$ est le système linéaire homogène associé à $(*)$.

~~[illegible]~~ Notons que :

1) $\forall b \in \mathbb{R}^m$, $(*)$ admet au moins une solution
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Vect}(\{a_j\}) = \mathbb{R}^m$. ($\{a_j\}$ est génératrice)

2) $(**)$ admet une unique solution $x = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\Leftrightarrow$ $\{a_j\}$ est une famille libre.

3) pour tout $b \in \mathbb{R}^m$ $(*)$ admet au plus une solution
$\Leftrightarrow$ $\{a_j\}$ est libre.

4) Pour tout $b \in \mathbb{R}^m$, $(*)$ admet exactement une solution
$\Leftrightarrow$ $\{a_j\}$ est une base. de $\mathbb{R}^m$

Notons que si $n=m$, $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$
et si 4 est verifiée, alors $n=m$.

Sommes, Sommes directes et produits.

Proposition : Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Preuve : Soit $B = \{b_1, \dots b_n\}$ une base de E, et $C = \{c_1 \dots c_m\}$ une base de F.

alors $\mathcal{U} = \{(b_1, 0), \dots, (b_n, 0), (0, c_1), \dots (0, c_m)\}$ est une base de $E \times F$:

Si $v \in E$, $w \in F$, $\exists \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ $v = \sum \lambda_i b_i$ $w = \sum \mu_j c_j$

Donc $(v, w) = \sum \lambda_i (b_i, 0) + \sum \mu_j (0, c_j)$, et $\mathcal{U}$ engendre $E \times F$.

Si $(0_E, 0_F) = \sum \lambda_i (b_i, 0_F) + \sum \mu_j (0_E, c_j)$,

alors $0_E = \sum \lambda_i b_i$ et $0_F = \sum \mu_j b_j$.

Comme B et C sont libres, on a $\lambda_i = \mu_j = 0$ $\forall i, j$. $\square$

Théorème (formule de Grassmann).

Soient E, F deux sous-espaces vectoriels du même ~~xxxx~~ espace de dimension finie. Alors

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F).$$

Preuve : Soit $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_k)$ une base de $E \cap F$.

Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $b_{k+1}, \dots, b_n \in E$ et $c_{k+1}, \dots, c_m \in F$ tels que $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$ est une base de E, et $\mathcal{C} = (a_1, \dots, a_k, c_{k+1}, \dots, c_m)$ est une base de F.

On veut montrer que $\mathcal{D} = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n, c_{k+1}, \dots, c_m\}$ est une base de $E+F$. Si c'est le cas, $\dim(E+F) = k + (n-k) + m - k = n+m-k$, ce qu'on veut montrer.

- $\mathcal{D}$ engendre $E+F$; Soit $u \in E+F$, $u = \underset{\overset{\cap}{E}}{v} + \underset{\overset{\cap}{F}}{w}$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, $v = \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j$

Comme $\mathcal{C}$ est une base de F, $w = \sum \lambda'_i a_i + \sum \mu'_j c_j$.

$\Rightarrow v + w = \sum (\lambda_i + \lambda'_i) a_i + \sum \mu_i b_i + \sum \mu'_i c_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$.

- $\mathcal{D}$ est libre ; Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n, \nu_{k+1}, \dots, \nu_m \in \mathbb{R}$, tels que

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j b_j + \sum_{j=k+1}^{m} \nu_j c_j .$$

On a donc $\underbrace{\sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j}_{\overset{\cap}{E}} = \underbrace{-\sum \nu_j c_j}_{\overset{\cap}{F}} \in E \cap F$.

$-\sum \nu_j c_j$ est donc une combinaison linéaire d'éléments dans $\mathcal{A}$.

Par l'unicité de l'écriture ($\mathcal{B}$ est une base), on obtient $\mu_j = 0 \ \forall j$.

Donc $0 = \sum \lambda_i a_i + \sum \nu_j c_j$ est une combinaison linéaire d'éléments dans $\mathcal{C}$, qui est libre $\Rightarrow \lambda_i = \nu_j = 0 \ \forall i, j$.

Alternativement : $-\sum \nu_j c_j = \sum \lambda_i' a_i$ pour certains λ_i'.

$\Rightarrow \sum \lambda_i' a_i + \sum \nu_j c_j = 0$ est une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{C}$, qui est libre $\Rightarrow \nu_j = 0 \ \forall j$.

$\Rightarrow \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j = 0$ combinaison linéaire nulle d'éléments dans $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \lambda_i = \mu_j = 0 \ \forall i, j$.

$\square$

Corollaire : Soit E un espace vectoriel ~~fini~~ de ~~lg~~ dimension finie, et V, W deux sous-espaces de E. Alors $E = V \oplus W$ si et seulement si $E = V + W$ et $\dim(E) = \dim V + \dim W$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, Soit $V = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$,
$W = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\{e_1, e_3\}$ est une base de V, $\{e_2, e_3\}$ est une base de W.

$W \cap V = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, $\{e_3\}$ est une base de W.

$$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim(V+W)}} = \dim(\mathbb{R}^3) = \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim V}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim W}} - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim(V \cap W)}}.$$

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $\forall V$ sous espace de E, il existe W supplémentaire de V.

Preuve : Soit $\underset{\shortparallel}{\mathcal{A}}$ une base de V, on la complète à $(b_1 \dots b_n)$ base $(b_1 \dots b_k)$ de E. Alors $W = \mathrm{Vect}(\{b_{k+1}, \dots, b_n\})$ est un supplémentaire de V.